

プラズマメーザー効果によるカオスの基礎的研究

藤 山 寛* 深 瀬 真 二**
服 部 修** 南 部 充 宏***

Basic Research of Chaotic Behavior by Plasma Maser Effect

by

Hiroshi FUJIYAMA*, Shinji FUKASE**
Osamu HATTORI**, Mitsuhiro NAMBU***

For the plasma maser interaction, the forced Lotka-Volterra equations have been studied in the dissipative system. The dynamics of solution for the wave energies showed the chaotic behavior in the nonlinear wave-wave interaction, the plasma maser.

1. はじめに

これまで天体,核融合,実験室プラズマ中で低周波モードが存在するいろいろな乱流の中から静電的あるいは電磁の高周波モードが物理的発生機構の不明なまま観測されてきた。例えば人工衛星による宇宙空間プラズマ中の ULF 波と ELF 波の結合¹⁾や核融合プラズマでの MHD 不安定に伴う電子プラズマ周波数放射²⁾などである。この現象を説明するためにプラズマメーザー効果という新しいモード間相互作用が発表されている³⁾。

これは、低周波波動に共鳴する電子から生じる非線形力で高周波波動が増幅するという up conversion 現象である。一般にプラズマ中では、エネルギーの大きな高周波短波長モードからエネルギーの小さな低周波長波長モードにエネルギーが輸送され、その結果として低周波モードが増幅される傾向をもっている。しかしながら、プラズマメーザー効果は逆のエネルギー輸送が起こる現象であり、これまでのプラズマ物理の常識を越えている。

筆者らは、この効果を実験的に検証することを目的とした研究を進めてきた⁴⁾。この一環として低周波イオン音波と高周波 Langmuir 波との間のエネルギー

のやり取りを観測するためイオンビーム入射法を用いた低周波励起による実験計画を進行させている。この方法により励起されるイオン音波から Langmuir 波へのプラズマメーザー効果によるエネルギーの輸送については、保存力学系を仮定した計算機シミュレーションが既に行われている⁵⁾。このシミュレーションは2種のコヒーレントな波の間の理想的なモード間結合を強制型 Lotka-Volterra 方程式で記述し、これを数値的に解析したもので、周期外力を強くすると保存力学系でカオスが発生するという興味深い結果となっている。本研究では、上述のシミュレーションをより実現可能なモデルに近づけるため、新たに散逸系での外力の作用するプラズマメーザー効果について数値的に解析を行った。想定されたモデルは散逸力学系の強制型 Lotka-Volterra 方程式で記述され、波動及び外部パラメータを適切に選ぶことにより解のダイナミクスはカオス的なふるまいを示した。

以下、第2章ではプラズマメーザー効果のメカニズムについて、第3章ではモデル方程式とそのシミュレーション解について述べ保存力学系における解と比較検討する。

昭和62年4月30日受理

*電気工学科 (Department of Electrical Engineering)

**電気工学専攻 (Graduate Student, Electrical Engineering)

***九州大学教養部 (College of General Education, Kyushu University)

2. プラズマメーザー効果

弱乱流プラズマにおいて最低次オーダーのモード間結合過程は、三つの素過程により構成されていることが明らかにされている⁹⁾。すなわち共鳴的三波相互作用⁷⁾、非線形 Landau ダンピング⁸⁾、そして最近第三番目のモード間結合として指摘されたプラズマメーザー効果^{3), 9)}である。従来の Maxwellian プラズマにおけるモード間結合では乱れのエネルギーは、高周波モードから低周波モードへ伝達される。プラズマメーザー効果は、共鳴電子の非線形散逸力によりこの逆のことが起こり得る。ここで簡単のためコヒーレントでしかも同一方向に伝播するイオン音波と Langmuir 波を考える。イオン音波の強い乱れが存在しているプラズマ中に無限小振幅の Langmuir 波をテスト波として印加すると、交流的高周波散逸力、

$$\bar{\mathbf{F}}_h = \left(\frac{|e|}{4\pi m} \right) \sum_{\mathbf{K}} \left[\frac{\bar{\mathbf{K}} \cdot \delta \mathbf{E}_h(\bar{\mathbf{K}}, \Omega)}{\Omega^2} \right] \times \bar{\mathbf{K}} \cdot \epsilon_i(-\bar{\mathbf{K}}, -\omega) |\bar{\mathbf{E}}|^2, \quad (1)$$

が発生する⁹⁾。ここで e , m はそれぞれ電荷量、電子の質量であり $\bar{\mathbf{E}}_h$, $\bar{\mathbf{E}}$ はそれぞれ Langmuir 波、イオン音波の乱れの電場を示す。又 ϵ_i はプラズマの誘電応答関数の虚部である。さらに、 $(\bar{\mathbf{K}}, \omega)$ と $(\bar{\mathbf{K}}, \Omega)$ はそれぞれイオン音波と Langmuir 波の波数と周波数を示す。この散逸力は Langmuir 波に同期して振動している電子の速度変動と位相が完全にそろい、電子に正の仕事を行う。そのとき電子に与えられたエネルギーによって Langmuir 波の振幅が成長する。一方共鳴電子にエネルギーを吸収されたイオン音波は減衰を受ける。従ってプラズマメーザー効果の条件として、 $\omega = \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ の共鳴及び $\Omega \neq \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ の非共鳴条件が挙げられる。 $\bar{\mathbf{v}}$ は電子の速度を示し、又イオン音波の位相速度 $(\omega/\bar{\mathbf{K}})$ でもある。

その他のモード間相互作用が起こる条件は、三波相互作用が $\Omega \pm \omega = \Omega'$ と $\bar{\mathbf{K}} \pm \bar{\mathbf{K}}' = \bar{\mathbf{K}}'$ 、非線形 Landau ダンピングは、 $\Omega \pm \omega = (\bar{\mathbf{K}} \pm \bar{\mathbf{K}}') \cdot \bar{\mathbf{v}}$ である。つまりプラズマメーザー効果は、基本的に初期の電子速度分布関数が Maxwellian でも起こり得ることが他の素過程と基本的に区別し得る大きなポイントである。なお $(\bar{\mathbf{K}}', \Omega')$ はビート波の波数と周波数である。

3. 数値計算及び考察

前章ではプラズマメーザー効果についてその概略を述べ、低周波のイオン音波と高周波の Langmuir 波との間で波動エネルギーのやりとりが生ずることを理論的に示した。この効果を実験室プラズマを用いて実験的に検証するためには、競合する他の非線形過程の起

こらない状態のプラズマを作り、イオン音波と Langmuir 波を励起することが必要となる。例えば非線形 Landau 減衰などは高エネルギー電子が存在しない Maxwell 分布の電子エネルギー分布では励起しにくい。このため、通常用いられるグリッド励起あるいは電子ビーム励起のイオン音波ではプラズマメーザー効果が独立して起こり得ず、結果の解釈が難しくなる。以上述べたことから、我々の実験ではイオンビームをパルス的にプラズマに入射することによりイオン音波を励起することにした。このときビーム入射によって励起、成長したイオン音波はそのエネルギーの一部を共鳴電子に移し、そのとき発生する非線形散逸力が Langmuir 波を励起する。又、イオン音波と Langmuir 波は Landau 減衰によりエネルギーを失うものとし、特にイオン音波については非線形飽和を考慮する。又、イオン音波が時間的に成長する場合に起こる Langmuir 波の減衰効果¹⁰⁾はここでは無視する。

このように仮定すると、2つの波の間のエネルギー輸送は簡単な Lotka-Volterra 型方程式系で記述され、この解の性質を調べることでイオンビームの密度や励起される波の周波数・波数などの情報を得ることができる。

3. 1 モデル方程式

イオン音波と Langmuir 波のエネルギーの時間変化は

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY \quad , \quad (2)$$

$$\frac{dY}{dt} = \gamma XY - \delta Y \quad , \quad (3)$$

により記述される⁹⁾。ここで X および Y はそれぞれプラズマの運動エネルギー密度で規格化されたイオン音波と Langmuir 波のエネルギー密度で、

$$X = \frac{E_i(\mathbf{k}, \omega)^2}{4\pi N T_e} \left(\frac{k_e}{k} \right)^2 \quad , \quad (4)$$

$$Y = \frac{E_h(\mathbf{K}, \Omega)^2}{4\pi N T_e} \quad , \quad (5)$$

である。また、各係数については $\alpha/2$ がイオン音波の線形成長率、 β はイオン音波の非線形減衰率であり、 γ は Langmuir 波の非線形成長率、 $\delta/2$ が Langmuir 波の線形 Landau 減衰率を示し、それぞれ

$$\alpha = 2|\omega| \left(\frac{N_1}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad (6)$$

$$\beta = \frac{k_e}{2|k|} \frac{m}{M} \omega_{pe} \quad , \quad (7)$$

$$\gamma = \pi \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|Kk|}{k_e^2} \omega_{pe} \quad , \quad (8)$$

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_e}{|K|} \right)^3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{k_e}{K} \right)^2 \right\} \omega_{pe} \quad , \quad (9)$$

である。ここでは N および N_i はそれぞれプラズマ密度とイオンビームの密度を示し、 M 、 T_e および ω_{pe} はそれぞれイオンの質量、電子温度と電子プラズマ周波数である。これらの値は Maxwell 分布関数に従うと仮定して得られたものである。(2)、(3)式は Lotka-Volterra 方程式と呼ばれ、元来、生態学における捕食者と被食者の生態系をモデル化したものである¹¹⁾。

今までは簡単のためエネルギーの損失を無視した保存力学系のモデル⁵⁾であった。実際の現象では損失があるので、より現実的なモデルとするためには、これを考慮しなくてはならない。そこで、イオン音波の非線形飽和を考慮した散逸力学系の方程式を考える。これは(2)式に logistic term である $-\epsilon X^2$ を加えることにより得られ、このとき(2)式は

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY - \epsilon X^2 \quad (2')$$

となる。ここで

$$\epsilon = 2 \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{k}{k_e} \right) \omega_{pe} \quad (10)$$

である。

実験においてイオン音波は冷たいイオンビームによって励起される。このビーム密度が周期的に時間変動すると、周期外力による系のカオス現象が発生すると予想される¹²⁾。この現象の実験による検証を行い、プラズマメーザーそのものの場合と同様に数値計算を行う必要がある。ビーム密度が周期的に時間変動すればイオン音波の線形成長率 $\alpha/2$ は時間に依存することになる。いまビーム密度が角周波数 ω_i でゆっくりと変

調されているとし、 α の瞬時値を α_0 とすると

$$\alpha_0 = \alpha \{1 + A \cos(\omega_i t)\} \quad (6')$$

となる。ここで A は定数で変調の度合を示す。したがって方程式は(2)式の α に α_0 を代入したものになる。これは強制型 Lotka-Volterra 方程式と呼ばれる。

3. 2 数値計算および考察

本節ではパーソナルコンピュータを用いた Runge-Kutta 法によるモデル方程式の数値計算結果を示し、それぞれの考察を述べる。この計算ではプラズマはアルゴンによるものと仮定し、基本となるプラズマパラメータの値を次のように定めた。

プラズマ密度 $N = 2.4 \times 10^8$ [cm⁻³],

電子温度 $T_e = 1.9$ [eV],

デバイ波数 $k_e = 15.1$ [cm⁻¹],

電子プラズマ周波数 $\omega_{pe} = 8.74 \times 10^8$ [rad/s].

これらの値は1986年に宇宙科学研究所において行った実験により得られたものである。前節で述べたように冷たいイオンビーム密度が周期的に時間変動する場合、2つの波のエネルギーの変化は強制型 Lotka-Volterra 方程式により記述される。強制型 Lotka-Volterra 方程式の2つの変数の解の全体はトーラス状をしている。解そのものはトーラス状に巻きついている。これらの解のうちの1つに注目し、トーラスの任意の断面上を通過する点をその面にプロットする。解はその後、時間変動の周期 $T = 2\pi/\omega_i$ でトーラスを一周し、再び面上のある点を通る。この点をプロットし、これを繰り返す。このようにして描かれた図を Poincaré マップ¹³⁾と呼び、これにより系の状態が明らかにされ

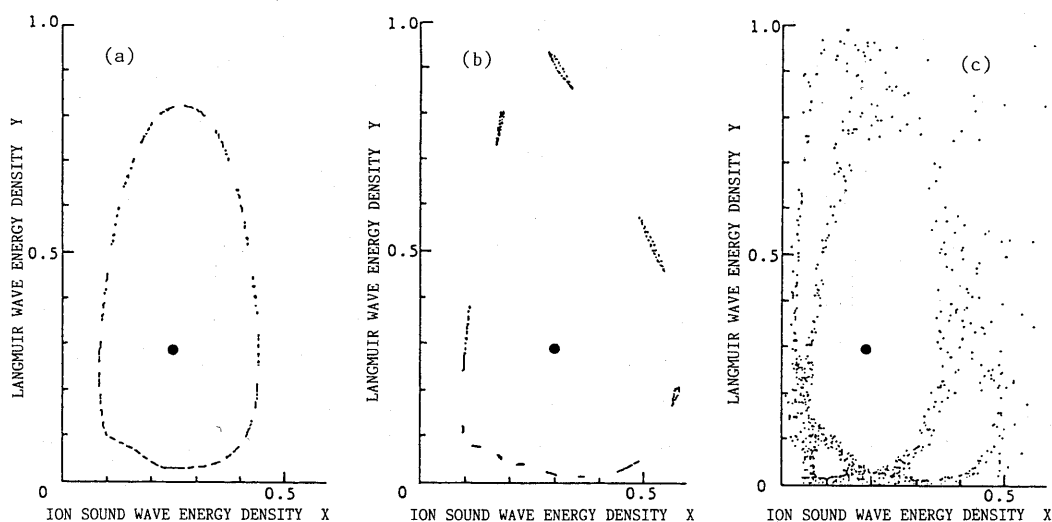


Fig. 1 Poincaré mappings for the conservative system ($\epsilon = 0$),
(a) $K/k_e = 0.182$, (b) $K/k_e = 0.1835$, (c) $K/k_e = 0.1805$.

る。

3. 2. 1 保存力学系 ($\varepsilon = 0$) のモデル

この数値計算は本庄、南部により既に報告されている⁹⁾が、散逸系との比較のため先に示した実験パラメータの値を用いて計算を行った。その Poincaré マップの代表的なものを Fig. 1 に示す。ここで横軸は規格化されたイオン音波のエネルギー密度 X 、縦軸は規格化された Langmuir 波のエネルギー密度 Y である。また、変調の度合 $A=0.6$ 、ビーム密度 N_1 とプラズマ密度 N との比 $N_1/N=0.01$ 、変調の角周波数 $\omega_t=6.2832 \times 10^4$ 、初期条件 $X=Y=0.1$ とし、ビームが入射された時刻をスタート時刻とした。また、図中の●は定常点を示し、定常点は $\dot{X}=\dot{Y}=0$ から次のように導かれる、

$$X_0 = \frac{\delta}{\gamma}, \quad Y_0 = \frac{\alpha - (\varepsilon\delta/\gamma)}{\beta} \quad (11)$$

Fig. 1 (a) は $K/k_e=0.182$, $k/k_e=0.115$ としたときの Poincaré マップである。この図において解の軌跡はトーラス状の閉曲線を描いている。これは系が周期的であることを示し、準周期解と呼ばれる。Fig. 1 (b) は $K/k_e=0.1835$, $k/k_e=0.115$ としたもので、解は島と呼ばれる 12 個の閉曲線からなっている。これらの島はそれぞれの固有点を一定の winding number¹²⁾ で取り囲む。なお、winding number とは解がトロイダル方向にトーラスをまわる回数と断面上をポロイダル方向にまわる回数の比である。Fig. 1 (c) では島の近くに確率的領域 (カオスの振舞い) が現われている。このとき $K/k_e=0.1805$, $k/k_e=0.115$ である。この系の解は

これらの 3 つのタイプからなり、波数だけでなく初期条件や変調の度合によってどの形の解を持つかが決まる。

3. 2. 2 散逸力学系 ($\varepsilon \neq 0$) のモデル

より現実に近いようにするためにイオン音波の非線形飽和を考慮して計算を行った。

プラズマメーザー効果と Landau 減衰により、イオン音波および Langmuir 波は成長と減衰を繰り返す。その周波数を ω_0 とすると

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\delta(\alpha\gamma - \varepsilon\delta)}{\gamma}} \quad (\text{ただし, } \alpha\gamma > \varepsilon\delta), \quad (12)$$

となる。ビームの変調周波数 ω_t と ω_0 との比が系の状態に大きく関係している。Fig. 2 に ω_t/ω_0 に対するイオン音波の規格化されたエネルギー密度 X の変化の相図を示す。これはビームが入射されてから 60 [m sec] 経過した後のエネルギー密度の状態をプロットしたもので、いずれも何点かに収束している。ここで初期条件は $X=Y=0.1$ 、変調の度合は $A=0.6$ である。

Fig. 3 に ω_t/ω_0 がそれぞれ (a) 3.76, (b) 2.055, (c) 2.88 のときの Poincaré マップを示す。この図を見ると時間の経過とともにそれぞれ 1 点、2 点、3 点に収束しているのがわかる。これは周波数ロッキング¹²⁾ と呼ばれ、一定の winding number で解が n 個の固有点 ($n=1, 2, \dots$ であり、 $n=1$ のときは定常点) に収束する現象である。この現象により系が周期的であることが確認できる。また、収束点の数および winding number は波数や初期条件などの微妙な変化により大きく異なる。

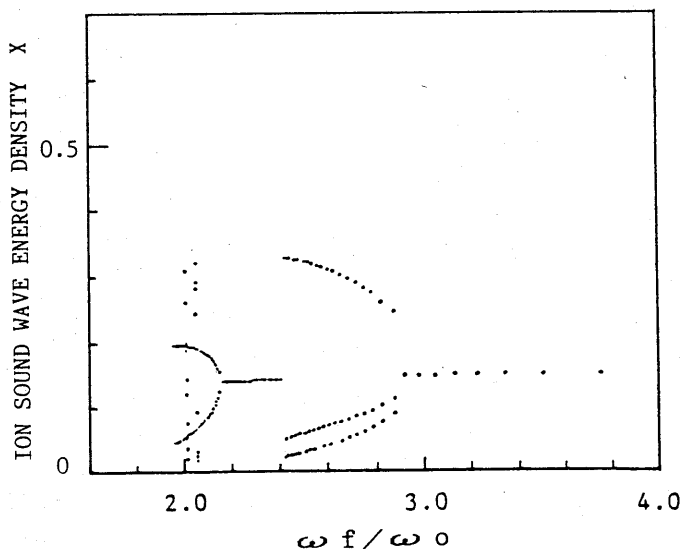


Fig. 2 Phase diagram where ω_t/ω_0 is the ratio of the modulated frequency ω_t to the frequency of the system.

Fig. 2 で ω_t/ω_0 が 2.0 付近に収束の仕方が他の部分と異なっているところが見受けられる。この条件に注目し、変調の度合 A の値を変化させて計算した Poincaré マップを Fig. 4 に示す。 A の値はそれぞれ (a) 8.5×10^{-1} , (b) 8.5002×10^{-1} , (c) 8.6001×10^{-1} である。 Fig. 4 (a) および Fig. 4 (b) では時間が経過するにつれ解が 2 点と 10 点に収束している。これに対し、 Fig. 4 (c) では解がランダムになりカオスの様相を示している。しかし、さらに時間が経過すると解は収束することも予想される。また、軌道の安定性を調べる最大 Lyapunov

数¹³⁾ λ_1 は、ビーム入射直後 $\lambda_1 > 0$ となり不安定であるが長時間経つと $\lambda_1 < 0$ となり安定になる。しかしながら、解が収束するまでの時間はビーム入射後波が励起、成長して実験装置内に留まっている時間に比べて十分長いので、現実の実験では解がカオスの振舞いを示すと考えられる。また、このように収束の仕方が異なる場所が存在することから、カオスが発生する可能性は十分にある。

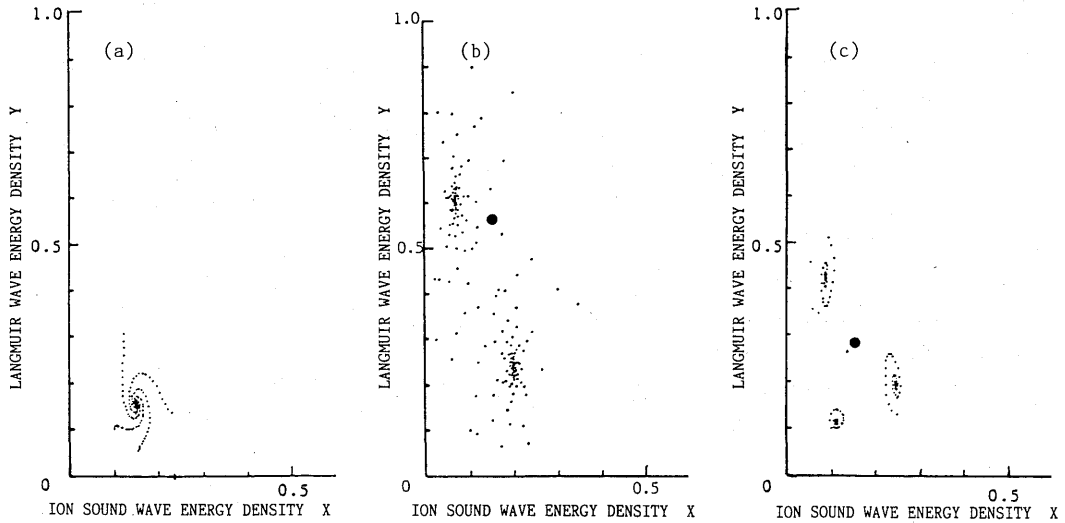


Fig. 3 Poincaré mappings for the dissipative system ($\varepsilon \neq 0$),
(a) $\omega_t/\omega_0 = 3.76$, (b) $\omega_t/\omega_0 = 2.055$, (c) $\omega_t/\omega_0 = 2.88$.

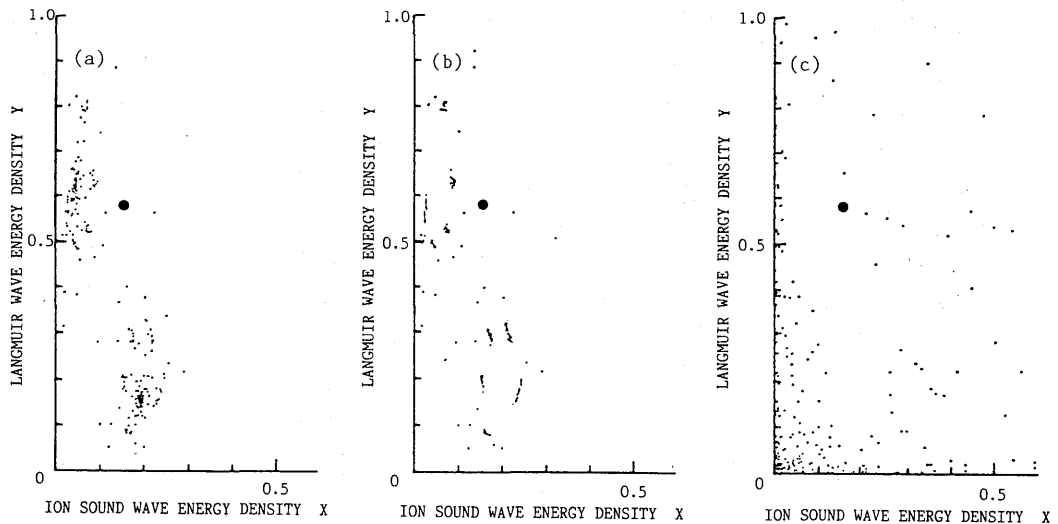


Fig. 4 Poincaré mappings for the dissipative system ($\varepsilon \neq 0$),
(a) $A = 8.5 \times 10^{-1}$, (b) $A = 8.5002 \times 10^{-1}$, (c) $A = 8.6001 \times 10^{-1}$.

4. おわりに

本研究では、散逸系のプラズマメーザー効果についてモデル方程式を導き、外部パラメータを変化させたときの解の変化について調べた。外力の作用するプラズマメーザー効果のモデルは、散逸力学系の強制型 Lotka-Volterra 方程式で記述された。このシミュレーション結果から変調された冷たいイオンビームプラズマの中で、プラズマメーザー効果による散逸系のカオスが起り得る可能性が示された。モデル方程式の初期値による依存性や強い磁場がプラズマメーザー効果に及ぼす影響などについて今後さらに検討していく予定である。

最後に、本研究に対し御助言いただいた九州大学教養部、本庄春雄氏に謝意を表する。

また本研究の一部は、三菱財団自然科学研究助成(昭和61年度)によって行われたことを記し、関係各位に感謝する。

参考文献

- 1) S. Bujarbarua, S. N. Sarma, M. Nambu and H. Fujiyama; Phys. Rev., A31, (1985), 3783.
- and M. Nambu, T. Tamao, et al.; Palnet. Space Sci., 34, (1986), 845.
- 2) I. H. Hutchinson and S. E. Kissel; Phys. Fluids, 26, (1983), 310.
- 3) M. Nambu; Phys. Rev., A33, (1986), 4215.
- 4) H. Fujiyama and M. Nambu; Phys. Lett., 105A, (1984), 295.
- 5) H. Honjo and M. Nambu; Jpn. J. Appl. Phys., 55, (1986) 4160.
- 6) M. Nambu; Laser and Particle Beams, 1, (1983), 427.
- 7) V. N. Oraevsky and R. Z. Sagdeev; Zh. Tekh. Fiz., 32, (1962), 1291.
- 8) M. N. Rosenbluth, B. Coppi and R. N. Sudan; Annals of Phys., 55, (1969), 248.
- 9) M. Nambu; J. Phys. Soc. Japan, 54, (1985), 2361.
- 10) D. F. DuBois and D. Pesme; Phys Fluids, 27, (1984), 218.
- 11) 早間; 生物物理, 20, (1980), 50.
- 12) M. Inoue and H. Kamifukumoto; Progress of Theoretical Phys., 71, (1984), 930.
- 13) 長島; 日本物理学会誌, 41, (1986), 19.